



## COMPARACION DE DOS MODELOS MATEMÁTICOS PARA DESCRIBIR CURVAS DE LACTANCIAS DE VACAS DOBLE PROPÓSITO.

*Pedro Guerra M.<sup>1</sup>; José Almillátegui<sup>2</sup>*

### RESUMEN

Dos modelos matemáticos fueron evaluados para describir la curva de lactancia de vacas doble propósito. Los datos provienen de fincas localizadas en cinco ecosistemas (E) y fueron monitoreadas en dos niveles tecnológicos (NT): Nivel Tradicional (ST) y Nivel Mejorado (SM). Los animales se agruparon en tres grupos raciales (GR): CCR (cebú), <50%E (igual o menor al 50% de sangre Holstein o Pardo Suizo) y >50%E (mayor al 50% de sangre Holstein o Pardo Suizo). Los modelos matemáticos fueron: función gamma de Wood (1967) o modelo W y función empírica de Jenkins y Ferrell (1984) o modelo JF. Se utilizó un análisis de varianza para evaluar los efectos de E, NT y GR sobre los parámetros de la curva de cada modelo. El tiempo al pico de lactancia (T<sub>PL</sub>), la producción de leche al pico de lactancia (PL<sub>PL</sub>) y la producción total de leche (PTL) fueron predichas para cada vaca. El E tuvo un efecto al  $P < 0.01$  sobre los parámetros  $a$  y  $k$  del modelo JF, pero al  $P < 0.05$  en  $a$  en el modelo W. El GR sólo tuvo un efecto al  $P < 0.05$  sobre  $b$  en el modelo W. El NT tuvo un efecto al  $P < 0.01$  sobre todos los parámetros del modelo W, pero al  $P < 0.05$  sobre  $a$  en el modelo JF. Más del 90% de las lactaciones tuvieron  $R^2 > 0.75$  con el modelo JF. El modelo JF predijo valores mayores de PTL y T<sub>PL</sub>, mientras que con el modelo W la PL<sub>PL</sub> fue ligeramente mayor. Para los sistemas doble propósito y considerando el manejo de la vaca, el modelo JF presenta mayores ventajas porque estima observaciones perdidas y estima una PTL muy similar a la realidad.

## COMPARISON OF TWO MATHEMATICAL MODELS TO DESCRIBE LACTATION CURVES OF DUAL PURPOSE COWS.

Two mathematical models were evaluated to describe the lactation curve of dual purpose cows. Data set came from farms localized in five ecosystems (E) and were monitored under two technological levels (NT): Traditional Level (ST) and Improved Level (SM). Animals were grouped in three breed groups (GR): CCR (Zebu), <50%E (Holstein or Brown Swiss blood proportion equal or less than 50%) and >50%E (Holstein or Brown Swiss blood proportion higher than 50%). Mathematical models were: Wood (1967) gamma function or model W and Jenkins and Ferrell (1984) empiric function or model JF. An analysis of variance was performed to evaluate

1 Ing. Agr., M.Sc. Mejoramiento Genético. Gerente del Proyecto de Cría y Cebs. Estación Experimental de Gualaca. IDIAP. CIAOC.

2 Ing. Agr., Investigador pecuario. IDIAP. CIAOR.



the effects of E, NT y GR. Time at Peak Lactation (TPL), Milk Yield at Peak Lactation (PLPL) and Total Milk Yield (PTL) were estimated for each cow. The effect of E was at  $P < 0.01$  on a and k parameters of model JF, but at  $P < 0.05$  on a parameter of model W. GR was significant ( $P < 0.05$ ) on b parameter of model JF. NT was highly significant over all parameters of model W, but was significant ( $P < 0.05$ ) on a parameter of model JF. More than 90% of the lactations had  $R^2 > 0.75$  with model JF. Model JF predicted higher values for PTL and TPL, while PLPL was higher with model W. For dual purpose systems and according with cow management, model JF presents higher advantages because estimates missing observations and estimates a PTL very similar to the reality.

## INTRODUCCIÓN

Para mejorar la planificación del manejo del hato es importante conocer el comportamiento de la producción de leche a través del tiempo en que transcurre la lactancia. Además, con la descripción matemática de las curvas de lactancia se pueden definir los criterios de selección y los sistemas de alimentación a aplicarse en la unidad de producción (Quiroz, 1992; Rook y col., 1993).

Las curvas de lactancias de vacas lecheras especializadas han sido ampliamente investigadas dando por resultado la propuesta de varios modelos matemáticos (Wood, 1967; Cobby y Le Du, 1978; Jenkins y Ferrell, 1984), los cuales, a su vez, han sido comparados y validados (Rowlands y col., 1982; Quiroz, 1992; Rook y col., 1993) en sistemas de producción intensivos. De estos modelos, el más ampliamente utilizado es el modelo gamma, propuesto por Wood (1967), sobre todo en hatos especializados para la producción de leche. Por otra parte, Jenkins y Ferrell (1984) propusieron para

describir la curva de lactancia de hatos cruzados de carne utilizar una fórmula empírica algebraica. Esta fórmula ha sido utilizada en hatos de carne por Guerra y col. (1990) y en animales cruzados del sistema de producción doble propósito por Guerra (1991) mostrando excelente ajuste de la función a los datos de campo.

Desde el punto de vista genético y tomando como referencia el sistema de producción bovino de leche (intensivo o doble propósito) es necesario evaluar al animal con mayor precisión, de acuerdo a su rendimiento total ajustado a 305 días o a una duración de lactancia promedio y a las características de la curva de lactancia tales como: tiempo al pico de lactancia y producción de leche en ese punto de la curva de lactancia para posteriormente aplicar un método de selección efectivo y sencillo. Para cumplir con tal fin, los modelos matemáticos que describen la curva de lactancia se han diseñado como herramientas valiosas para estas evaluaciones genéticas, pero la estima-



ción de las producciones totales ajustadas y su precisión estarán en función del ajuste del modelo a los datos de campo, de allí la importancia de obtener una función matemática que sea confiable para poder estimar progresos genéticos reales.

El sistema doble propósito se caracteriza por explotar animales Cebú (*Bos indicus*) y cruces con animales de las razas Holstein y Pardo Suizo (*Bos taurus*). El ordeño se realiza una vez al día con apoyo del ternero, aunque ha estado tomando auge la práctica del doble ordeño. La alimentación se basa en el uso de pasturas y suplementan el hato de ordeño con mezclas líquidas durante la época seca. Muy pocos productores llevan registros de producción, por lo que desconocen el comportamiento de la producción de leche en el tiempo y la selección de los animales se efectúa sin criterios genéticos.

Los modelos de Wood (1967) y Jenkins y Ferrell (1984) no han sido comparados utilizando datos de producción de leche del sistema doble propósito, por lo que el presente trabajo pretende evaluar la aptitud de ambos modelos en describir el comportamiento de la curva de lactancia de animales Cebú y cruzados (*Bos taurus* x *Bos indicus*), predominantes en este sistema.

## MATERIALES Y MÉTODOS

Para la realización de este estudio, se tomaron los pesajes mensuales de leche de 905 lactancias, proveniente de cinco ecosistemas, generados durante la ejecución del Proyecto sobre el Mejoramiento de los Sistema de Producción Doble Propósito (Proyecto IDIAP-CIID) durante el período 1983-89. Detalles de este proyecto están descrito en el informe final del proyecto (IDIAP, 1991); y en los trabajos de De Gracia (1991) y Guerra (1991).

Durante la ejecución del proyecto IDIAP-CIID se efectuaron dos estudios: el Estudio del Sistema Tradicional (EST), en donde se estudió el sistema tal cual como lo manejaba el productor y el Estudio del Sistema Mejorado (ESM), en donde se estudió el sistema con la implementación de mejoras tecnológicas (introducción de pasturas mejoradas y suplementación energética-protéica de verano para vacas en producción y terneros, plan sanitario y sales minerales para el hato en general). Estos estudios dieron origen a dos niveles tecnológicos correspondientes: Nivel Tradicional (ST) y Nivel Mejorado (SM).

El proyecto IDIAP-CIID se ejecutó en cinco ecosistemas a saber: Gualaca Alto, Gualaca Bajo, Bugaba Medio,



Bugaba Bajo y Los Santos. Por otra parte, las fincas doble propósito presentaron un mosaico de cruces (*Bos taurus* x *Bos indicus*) entre razas europeas con razas índicas. Para definir el efecto de tales encastes raciales, los animales se agruparon de acuerdo a su fenotipo e información del productor, en tres categorías: >50%E o animales con más de 50% de sangre Holstein o Pardo Suizo; <50%E o animales con igual o menos del 50% de sangre Holstein o Pardo Suizo y CCR o animales Cebuinos.

Los pesajes de la leche se efectuaron mensualmente. En circunstancias donde el ternero presentó condiciones nutricionales deplorables, la madre fue retirada del ordeño por uno a tres meses hasta que éste se recuperó y, posteriormente, se incorporó al grupo de ordeño. Basado en este manejo, se estableció como criterio seleccionar sólo aquellas lactancias con más de cinco pesajes y con no más de dos pesajes perdidos consecutivamente.

Debido a que los ordeños se realizaron con apoyo del ternero, las producciones se consideraron como "leche vendible". En otras palabras, no se incluye la leche consumida por el ternero. Los modelos matemáticos utilizados en este estudio para describir la curva de lactancia son:

1. **Función gamma de Wood (1967) o modelo W.**

$$Y_n = a n^b e^{-cn}$$

donde:

$Y_n$  = es la producción de leche en el n-ésimo día

$a, b$  y  $c$  = Parámetros que determinan la escala y forma de la curva

$e$  = 2.718281828459045... (número inconmesurable).

$n$  = Tiempo de lactancia (días).

Para la estimación de los parámetros de las curvas se aplicó una transformación logarítmica a la función gamma para convertirla en un modelo lineal y efectuar la estimación, para cada lactancia, de los parámetros de la curva por regresión lineal de acuerdo a Steel y Torrie (1960).

De los parámetros estimados ( $a, b$  y  $c$ ) se calcularon las siguientes variables o características de la curva de lactancia:

- ❖ Tiempo al pico de lactancia (TPL):  
 $TPL = b/c$
- ❖ Producción de leche al pico de lactancia (PLPL):



$$PLPL = a(b/c)^b(e^{-b})$$

- ❖ Producción total por lactancia (PTL):

$$PTL = \sum Y_n$$

## 2. Ecuación empírica de Jenkins y Ferrell (1984) o modelo JF.

$$Y(n) = [ n / (a e^{kn}) ]$$

donde:

- Y(n) = es la producción de leche en el n-ésimo día
- a y k = Parámetros que determinan la escala y forma de la curva
- e = 2.718281828459045... (número inconmesurable)
- n = Tiempo de lactancia (días)

La estimación de los parámetros de la ecuación también se efectuó individualmente mediante métodos de regresión lineal de la ecuación transformada logarítmicamente de acuerdo a Steel y Torrie (1960).

Con los parámetros estimados (a y k) también se calcularon las características de la curva de lactancia:

- ❖ Tiempo al pico de lactancia (TPL):  
TPL=1/k

- ❖ Producción de leche al pico de lactancia (PLPL):  
PLPL=1/(kae)

- ❖ Producción de leche ajustada a 280 días (PTL280):

$$PTL280 = (1/ak^2)(-280ke^{-280k} + e^{-280k} - ke^{-k} + e^{-k})$$

Debido a que los datos provienen de diferentes ecosistemas, niveles tecnológicos y grupos raciales, los parámetros estimados de los dos modelos matemáticos se analizaron estadísticamente mediante el siguiente modelo lineal fijo de acuerdo a Searle (1971) para determinar el efecto de cada uno de ellos y sus posibles interacciones.

$$Y_{ijk} = m + E_i + GR_j + (E*GR)_{ij} + NTk + (NT*GR)_{ik} + e_{ijk}$$

donde:

- Y<sub>ijk</sub> = es la observación y/o parámetro de la curva
- m = media general



- $E_i$  = efecto del ecosistema (E)
- $GR_j$  = efecto del grupo racial (GR)
- $(E*GR)_{ij}$  = efecto de la interacción entre el ecosistema y grupo racial ( $E*GR$ )
- $NT_k$  = efecto del nivel tecnológico (NT)
- $(NT*GR)_{jk}$  = efecto de la interacción entre el nivel tecnológico y el grupo racial ( $NT*GR$ )
- $e_{ijk}$  = efecto residual

Para estudiar la efectividad de los modelos matemáticos, se tomó en consideración el coeficiente de determinación ( $R^2$ ). A cada curva de lactancia se le estimó el  $R^2$  y estos fueron agrupados en cuatro categorías para analizar su distribución (Spiegel, 1961) tomando en consideración el nivel tecnológico y grupo racial. Las cuatro categorías son: 0.00 a 0.25 = muy pobre; 0.26 a 0.50 = pobre; 0.51 a 0.75 = regular; y 0.76 a 1.00 = bueno.

## RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En el Cuadro 1 se presentan los cuadrados medios del análisis de varianza de los parámetros de la curva de lactancia de acuerdo al modelo JF.

Los efectos simples de E y NT, y las interacciones  $E*GR$  y  $NT*GR$  mostraron efectos altamente significativos ( $P < 0.01$ ) sobre el parámetro a de la curva de lactancia. Sin embargo, el efecto del GR no tuvo un efecto significativo ( $P > 0.05$ ) sobre los parámetros a y k. Por otra parte, el coeficiente de variación (CV) fue de 53.7%. Debido a la escasez de información sobre este tipo de estudio, no se puede definir si el CV encontrado en este análisis se encuentra dentro de los rangos aceptables para estudios con datos obtenidos de fincas doble propósito.

Diferencias en el parámetro k del modelo JF, solamente se atribuyó al E ( $P < 0.01$ ) y el CV encontrado fue de 29.2%. De acuerdo a Jenkins y Ferrell (1984), las interpretaciones biológicas directas de los parámetros a y k no han sido desarrolladas; sin embargo, indicaron que el parámetro k afecta la forma general de la curva de lactancia, por lo que puede ser considerada como una medida indirecta de la persistencia de la lactancia.

Con base en esta información, la persistencia de la curva de lactancia está en función del ecosistema en donde interactúa el animal doble propósito y no del NT y GR.



**CUADRO 1. RESULTADOS DEL ANÁLISIS DE VARIANZA (CUADRADOS MEDIOS) DE ACUERDO A LOS PARÁMETROS DEL MODELO MATEMÁTICO.**

FUENTES DE VARIACIÓN	Jenkins y Ferrell (1984)			Wood (1967)			
	g.l.	a	k	g.l.	a	b	c
Ecosistema (E)	4	166.0 **	0.000249 **	4	6.87	0.247	0.000034
Grupo Racial (GR)	2	29.6	0.000043	2	0.73	0.628	0.000061
E*GR	8	57.8 *	0.000125	8	2.20	0.168*	0.000021
Nivel Tecnológico (NT)	1	460.7 **	0.000012	1	37.86**	3.185**	0.000353 **
NT*GR	2	97.8 *	0.000069	2	1.29	0.010	0.000003
Error	887	25.3	0.000078	552	2.10	0.235	0.000023
C.V. (%)		53.7	29.2		34.8	87.0	69.9

C.V. Coeficiente de Variación.

\*\* = P < 0.01

\* = P < 0.05

Los cuadrados medios del análisis de varianza de los parámetros de la curva de lactancia del modelo W, también se detallan en el Cuadro 1.

De los factores incluidos en el análisis estadístico, la variable independiente NT mostró un efecto altamente significativo ( $P < 0.01$ ) sobre todos los parámetros de la curva de lactancia (a, b y c). Por otro lado, los efectos de E y GR fueron significativos ( $P < 0.05$ ) sobre los parámetros a y b. Las interacciones E\*GR y NT\*GR no mostraron significancia alguna ( $P > 0.05$ ) en los tres parámetros. Los coeficientes de variación fueron 34.8%, 87.0% y 69.9% para los parámetros a, b y c, respectivamente.

El Cuadro 2 presenta la distribución de los coeficientes de determinación ( $R^2$ )

de los análisis de regresión de cada lactancia de acuerdo al modelo matemático y al grupo racial. Tomando en consideración el modelo W, el 38.9% de las lactancias de los CCR presentaron  $R^2$  superior al 0.75, mientras que para los grupos raciales <50%E y >50%E las frecuencias, para esta categoría, fueron de 34.5% y 31.7%, respectivamente. Estas frecuencias fueron las más altas en los tres grupos raciales.

El 13.8%, 19.0% y 16.2% de las lactancias de los CCR, <50%E y >50%E, respectivamente, tuvieron  $R^2$  entre 0.00 y 0.25, mientras que el 47.3%, 46.5% y 52.1%, para los mismos grupos raciales presentaron  $R^2$  entre 0.26 y 0.75.

Sin embargo, de acuerdo al modelo JF, el 96.4%, 91.4% y 91.8% de las



lactancias de los CCR, <50%E y >50%E obtuvieron  $R^2$  superiores a 0.75, lo cual muestra un grado de ajuste muy superior y significativo en comparación al modelo W. Solamente el 3.6%, 8.6% y 8.2% de las lactancias de los CCR, <50%E y >50%E, respectivamente, obtuvieron  $R^2$  por debajo de 0.75.

El pobre ajuste del modelo W a los datos se atribuye al reducido número de observaciones (pesajes de leche) por lactancia, sobre todo en aquellos animales que fueron retirados temporalmente del ordeño por problemas nutricionales del ternero. Otra razón, está relacionada al mayor número de parámetros a estimar en el modelo W, los cuales representan tres grados de libertad en el análisis de regresión, reduciéndose así los grados de libertad para estimar el error experimental. Sin embargo, en el modelo JF sólo se tienen que estimar dos parámetros, los cuales representan dos grados de libertad extraídos por el modelo de regresión, obteniéndose así un grado de libertad adicional para estimar el error experimental.

La distribución de las lactancias de acuerdo al  $R^2$  y NT se presenta en el Cuadro 3. El patrón de distribución de las lactancias con el modelo W es similar al reportado en el Cuadro 2. El 29.6%

y 35.8% de las lactancias registradas durante el ST y SM, respectivamente, presentaron  $R^2$  superiores al 0.75, mientras que el 28.4% y 29.2%, para los mismos niveles tecnológicos, estuvieron entre 0.51 y 0.75. El 42.0% y 35.0% de las lactancias en el ST y SM tuvieron  $R^2$  entre 0.00 y 0.50.

Por otra parte, con el modelo JF, el 92.9% y 92.4% de las lactancias registraron  $R^2$  superior al 0.75 en el ST y SM, respectivamente. Solamente un 7.1% y 7.6% de las lactancias mostraron  $R^2$  en el rango de 0.00 a 0.75 para los mismos niveles tecnológicos.

De acuerdo a Steel y Torrie (1960), el  $R^2$  representa el cuadrado del Coeficiente de Correlación Múltiple (CCM), el cual mide el grado de relación entre la variable dependiente y el grupo de variables independientes. Con esto en consideración, los  $R^2$  superiores a 0.75 indican que los CCM son también superiores a 0.87, indicando una alta asociación entre la variable dependiente y las independientes (parámetros). Considerando los resultados de los Cuadros 2 y 3, el modelo JF es el que mejor describe la curva de lactancia de animales doble propósito, ya que más del 90% de las lactancias tuvieron  $R^2$  superiores a 0.75.



CUADRO 2. DISTRIBUCION DE LACTANCIA DE ACUERDO AL COEFICIENTE DE DETERMINACION ( $R^2$ ) POR ENCASTE RACIAL Y MODELO MATEMÁTICO.

MODELO MATEMÁTICO	GRUPO RACIAL	N	$R^2$			
			0-0.25	0.26-0.50	0.51-0.75	>0.75
Jenkins y Ferrell (1984)	CCR	167	0	0	3.6	96.4
	≤50%E	174	0	0.6	8.0	91.4
	>50%E	564	0	1.1	7.1	91.8
Wood (1967)	CCR	167	13.8	19.8	27.5	38.9
	≤50%E	174	19.0	17.8	28.7	34.5
	>50%E	564	16.2	22.7	29.4	31.7

CUADRO 3. DISTRIBUCION PORCENTUAL DE LACTANCIAS DE ACUERDO AL COEFICIENTE DE DETERMINACION ( $R^2$ ) POR NIVEL TECNOLÓGICO Y MODELO MATEMÁTICO.

MODELO MATEMÁTICO	NIVEL TECNOLÓGICO	N	$R^2$				
			0-0.25	0.26-0.50	0.51-0.75	>0.75	
Jenkins y Ferrell (1984)	Tradicional	324	0	0.9	6.2	92.9	
	Mejorado	581	0	0.7	6.9	92.4	
Wood (1967)	Tradicional	324	17.3	24.7	28.4	29.6	
	Mejorado	581	15.7	19.3	29.2	35.8	



Las características de la producción de leche de acuerdo a los modelos matemáticos y grupos raciales se presentan en el Cuadro 4. De las 905 lactancias utilizadas en el estudio, solamente 570 lactancias (63%) calificaron para estimar PTL, PLPL y TPL de acuerdo al modelo W. Sin embargo, con el modelo JF todas las lactancias calificaron para estimar PTL, PLPL y TPL.

Con el modelo W se encontró que el TPL se alcanzó más tempranamente que con el modelo JF en los tres grupos raciales. Así, para los CCR con el modelo W, el TPL fue 38.3 días más temprano y para los <50%E y >50%E fue 43.8 días y 41.9 días, respectivamente. Con la PLPL,

el modelo W estimó valores ligeramente superiores a los estimados con el modelo JF en los tres grupos raciales. En los CCR, con el modelo W, se produjo 0.41 kg más de leche al pico de la lactancia y en los <50%E y >50%E se produjeron 0.08 y 0.15 kg más de leche, respectivamente.

En la producción total de leche, se observó una mayor estimación con el modelo JF. En los CCR se produjo 184.1 kg más de leche total, en los <50%E 196.2 kg de más y en los >50%E 251.6 kg de más.

Las altas producciones de leche por lactancia estimadas en el modelo JF se

**CUADRO 4. CARACTERÍSTICAS DE LA PRODUCCIÓN DE LECHE DE ACUERDO A LOS MODELOS MATEMÁTICOS Y ENCASTE RACIAL ( $X \pm S_v$ )**

MODELO MATEMÁTICO	CARACTERÍSTICAS	N	GRUPO RACIAL		
			CCR	<50%E	>50%E
Jenkins y Ferrell (1984)	TPL, d	905	111.9 ± 5.4	112.0 ± 4.3	119.3 ± 1.8
	PLPL, kg	905	4.19 ± 0.2	4.67 ± 0.2	5.33 ± 0.1
	PTL, kg	905	1101.0 ± 71.9	1210.8 ± 57.0	1451.1 ± 24.4
Wood (1967)	TPL, d	570	73.6 ± 5.8	68.2 ± 4.8	77.4 ± 2.2
	PLPL, kg	570	4.60 ± 0.3	4.75 ± 0.2	5.48 ± 0.1
	PTL, kg	905	916.9 ± 56.6	1014.6 ± 44.8	1199.5 ± 19.2

TPL = Tiempo al Pico de Lactancia.

PLPL = Producción de Leche al Pico de Lactancia.

PTL = Producción Total de Leche Ajustada.



atribuyen a que los valores de los pesajes de leche perdidos, por las razones antes expuestas, son estimados a través de la integración de la función matemática. Sin embargo, con el modelo W las observaciones perdidas (pesajes de leche) no pueden ser estimadas y no son consideradas para estimar la producción total, por lo que se tiende a subestimar la producción total real.

Debido a que la función matemática del modelo JF tiene integral propia, la PTL280 se calcula a través de encontrar el área total de la curva ajustada a una lactancia de 280 días, por lo que las observaciones perdidas pueden ser estimadas y el cálculo del área debajo de la curva da una estimación más aproximada de la producción total real.

Al comparar ambos modelos matemáticos en alpacas Suri, Quiroz (1992) encontró que con el modelo W, el TPL también se alcanzaba más tempranamente, pero la PLPL y PTL fueron ligeramente menores con respecto al modelo JF. Debido al bajo número de animales empleados en su trabajo y al uso de lactancias con observaciones completas, sus resultados no son muy concluyentes y recomendables para los sistemas doble propósito, a pesar de que se encontró un  $R^2$  de 0.96 y 0.94 para el modelo W y JF, respectivamente.

## CONCLUSIONES

- El modelo de Jenkins y Ferrell (1994) es el que mejor describe la curva de lactancia de animales cruzados en sistemas de producción doble propósito tomando en consideración tanto el grado de encaste racial como el nivel tecnológico.
- El modelo de Jenkins y Ferrell (1984) presenta ventajas sobre el modelo de Wood (1967), ya que sólo estima dos parámetros de la curva de lactancia, la producción total se ajusta a la longitud de lactancia promedio del hato y estima mediciones o pesajes perdidos o faltantes cuando se predice la producción total de leche.

## BIBLIOGRAFÍA

- COBBY, C.T.; LE DU, Y.L.P. 1978. On fitting curves to lactation data. *Animal Production (England)* 26: 127-133.
- DE GRACIA, M. 1991. Sistemas de producción bovina de doble propósito en Panamá. *Revista Turrialba (Costa Rica)* 41:108-120.



- GUERRA, P. 1991. Producción de leche de animales cruzados en sistemas doble propósito de Panamá. *Revista Turrialba (Costa Rica)* 41:96-107.
- GUERRA-MARTINEZ, P.; DICKERSON, G.E.; ANDERSON, G.B.; GREEN, R.D. 1990. Embryo-transfer twinning and performance efficiency in beef production. *Journal of Animal Science (USA)* 68:4039-4050.
- INSTITUTO DE INVESTIGACION AGROPECUARIA DE PANAMA (IDIAP). 1991. Informe Final. Proyecto Estudio del Mejoramiento de Sistemas Doble Propósito de Panamá. IDIAP-CIID. Panamá. 234 p.
- JENKINS, T.G.; FERRELL, C.L. 1984. A note on lactation curves of cross breed cows. *Animal Production (England)* 39:479-482.
- QUIROZ, R. 1992. Apuntes sobre modelos matemáticos en problemas ganaderos. *En Simulación de sistemas agropecuarios*. M. Ruiz (ed.). San José, Costa Rica. IICARISPAL-CIID. 284 p.
- ROOK, A.J.; FRANCE, J.; DHANOA, M.S. 1993. On the mathematical description of lactation curves. *Journal of Agricultural Science (USA)* 121: 97-102.
- ROWLANDS, G.J.; LUCEY, S.; RUSSELL, A.M. 1982. A comparison of different models of the lactation curve in dairy cattle. *Animal Production (England)* 35:135-144.
- SEARLE, S.R. 1971. Linear models. John Wiley y Sons. New York. USA. 532 p.
- SPIEGEL, M.R. 1961. Theory and problems of statistics. Schaum's Outline Series in Mathematics. McGraw-Hill Book Co. New York, USA. 359 p.
- STEEL, R.D.G.; TORRIE, J.H. 1960. Principles and procedures of statistics. A biometrical approach. 2nd ed. McGraw-Hill Book Co. New York. USA. 631 p.
- WOOD, P.D.P. 1967. Algebraic model of the lactation curve in cattle. *Nature (USA)* 216:164-165.